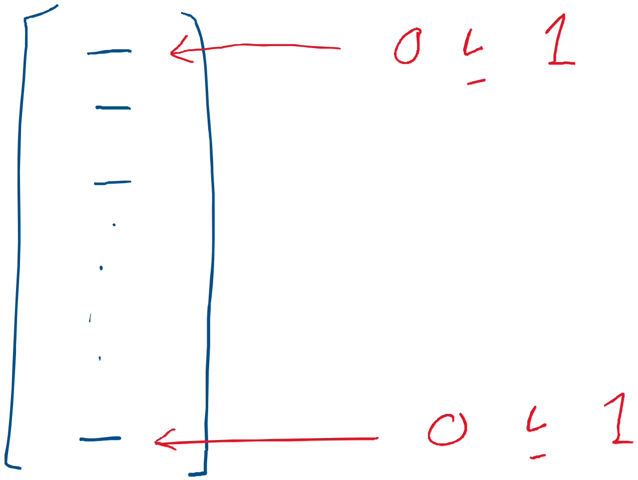
به نام خدا

بردار باینری به طول N



تعداد کل بردارهای به طول N $= 2^N$

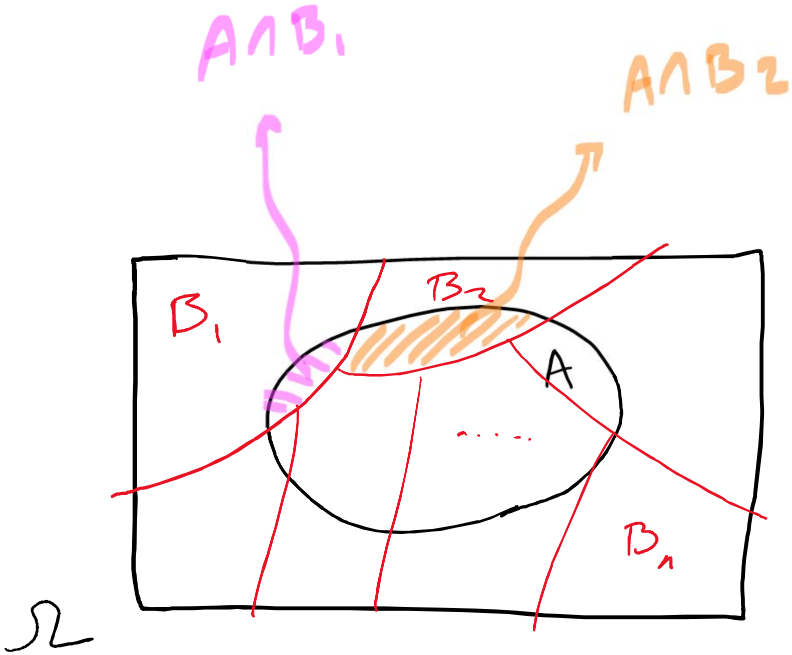
تعداد بردارهای باینری با m تا 1 $= C_m^N$

$m \leq N$

جلسه گذشته از رابطه زنجیره‌ای برای حل مسائل احتمال، کمک گرفتیم. علاوه بر رابطه زنجیره‌ای، روابط دیگری نیز وجود دارند که می‌توانند در حل مسائل به ما کمک کنند. در ادامه دو رابطه‌ی پرکاربرد را معرفی خواهیم کرد.

* قضیه احتمال کل و فرمول بیز

الف) قضیه احتمال کل



فرض کنیم که A یک پیشامد دلخواه و B_1 و B_2 و ... و B_n یک افراز روی Ω باشند. در این صورت داریم

$$\xrightarrow[\text{هستند}]{B_i \text{ ها جدا از هم}} \quad P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\, P(A \mid B_i)$$

از ضرب زنجیره‌ای

اثبات :

$$A = A \cap \Omega = A \cap \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} B_i}_{\bigcup_{i=1}^{n} B_i} \Big) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (A \cap B_i)}_{\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)}$$

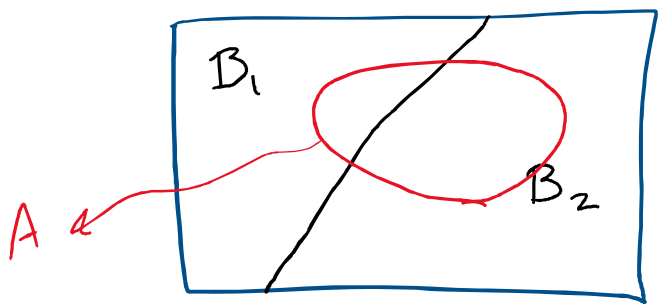
$$\xrightarrow[(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \varphi \;\; \forall i \neq j]{B_i \text{ ها جدا از هم}} \quad P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\, P(A \mid B_i)$$

از ضرب زنجیره‌ای

مثال. دو جعبه ترانزیستور داریم. در جعبه ی اول 2 ترانزیستور خراب و 8 ترانزیستور سالم وجود دارند. در جعبه ی دوم 9 ترانزیستور خراب و 6 ترانزیستور سالم داریم. یک جعبه را به صورت تصادفی انتخاب می کنیم و یک ترانزیستور به صورت تصادفی از آن بر می داریم. احتمال اینکه ترانزیستور انتخاب شده خراب باشد را به دست بیاورید. (استفاده از قضیه احتمال کل)

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)$$

$$= P(B_1)\, P(A \mid B_1) + P(B_2)\, P(A \mid B_2)$$



پیشامد اینکه ترانزیستور خراب باشد

$$P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2} \Longrightarrow P(A) = \frac{1}{2} P(A|B_1) + \frac{1}{2} P(A|B_2)$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{9}{15} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$$

B_1 : انتخاب جعبه اول

B_2 : انتخاب جعبه دوم

A : خراب بودن ترانزیستور

یا $$P(A) = \frac{1}{2} \frac{\binom{2}{1}}{\binom{10}{1}} + \frac{1}{2} \frac{\binom{9}{1}}{\binom{15}{1}}$$

☆ در مسئله قبل اگر پیچ از سیستم انتخاب شده خراب باشد، احتمال اینکه جعبه دوم را انتخاب کرده باشیم چقدر است؟

$$P(B_2 \mid A) = ?$$

این گونه احتمالات را احتمالات پسین یا پس از مشاهده می‌گوییم و با کمک فرمول بیز Bayes به دست می‌آوریم:

Probability Apriori احتمال پیشین یا پیش از مشاهده

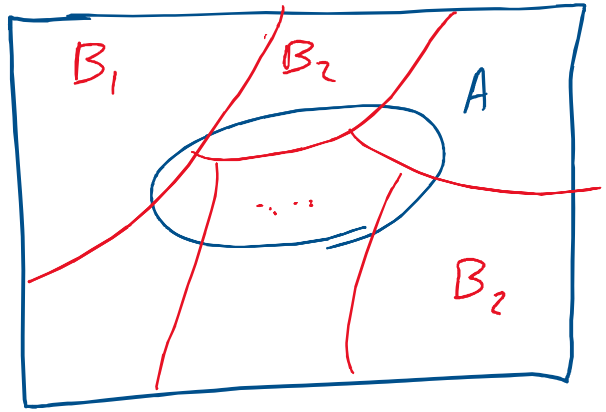
$$\underbrace{P(B_j \mid A)}_{\text{احتمال پسین یا پس از مشاهده}} = \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)} \underset{\uparrow}{=} \frac{P(B_j)\,P(A \mid B_j)}{P(A)} \underset{\uparrow}{=} \frac{P(B_j)\,P(A \mid B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\,P(A \mid B_i)}$$

Aposteriori Probability

رابطه زنجیره‌ای

قضیه احتمال کلی

$$P(B_j | A) = ?$$



$$P(B_j | A) = \frac{P(B_j)\, P(A | B_j)}{P(A)}$$

$$P(B_j | A) = \frac{P(B_j)\, P(A | B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\, P(A | B_i)}$$

قضیه احتمال کل

(فرمول بیز)

از مثال قبل:

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2)\,P(A|B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{9}{15}}{\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$\Longrightarrow P(B_1|A) = 1 - P(B_2|A) = \frac{1}{4}$$

مثال 2 - سه سکه C_1 ، C_2 ، C_3 در اختیار داریم. هر دو طرف سکه C_1 خط است، هر دو طرف سکه C_2 شیر است و سکه C_3 سالم است (یک طرف خط و یک طرف شیر). یک سکه را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم و یک بار پرتاب می‌کنیم. اگر شیر مشاهده کرده باشیم، احتمال اینکه سکه سالم انتخاب شده باشد را به دست بیاورید.

$$P(C_1) = P(C_2) = P(C_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(C_3 \mid H) = ?$$

$$P(C_3|H) = \frac{P(C_3)\,P(H|C_3)}{P(H)} = \frac{P(C_3)\,P(H|C_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(C_i)\,P(H|C_i)}$$

فرمول بیز

قضیه احتمال کل

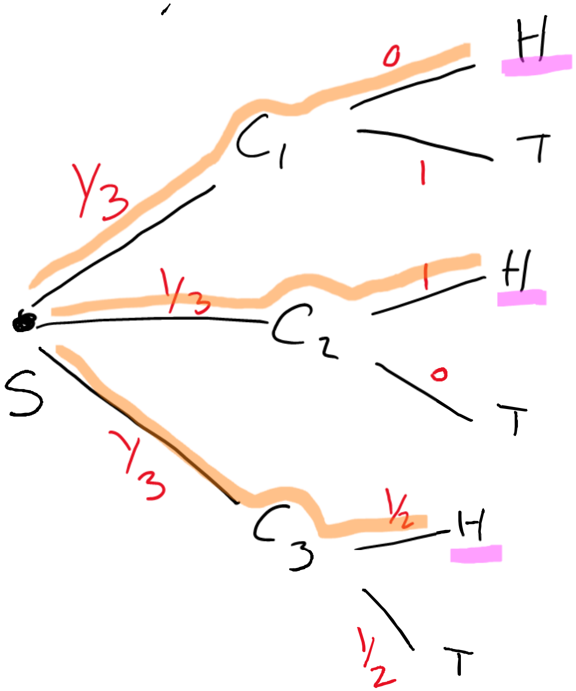
$$P(H|C_1) = 0 \quad , \quad P(T|C_1) = 1$$

$$P(H|C_2) = 1 \quad , \quad P(T|C_2) = 0$$

$$P(H|C_3) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(T|C_3) = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad P(C_3 \mid H) = \frac{P(C_3)\,P(H \mid C_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(C_i)\,P(H \mid C_i)} = \frac{1/3 \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

قضیه احتمال کل را می‌توان روی درخت نیز نمایش داد، برای محاسبه احتمال پیشامدها از آن استفاده کرد



$$P(H) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$$

مثال 3 - کانال باینری متقارن در مخابرات

یکی از پرکاربردترین مدل‌های کانال دیجیتال در مخابرات، کانال باینری متقارن است. در این کانال، ورودی و خروجی کانال فقط در حالت '0' و '1' را شامل می‌شوند. در حالت ... های مخابراتی پیچیده، های ... زیادی باعث ایجاد خطاهایی بر روی اطلاعات ارسالی می‌شوند. در کانال باینری متقارن در اثر خطاهای کانال ممکن است بیت '0' به بیت '1' یا برعکس تغییر کند. احتمال این تغییر (خطا) برابر P در نظر گرفته می‌شود ($P < \frac{1}{2}$). به عبارت دیگر احتمال اینکه فرستنده بیت '0' را بفرستد ولی در گیرنده بیت '1' دریافت شود (و برعکس) برابر P است.

ورودی کانال (سمت فرستنده TX)

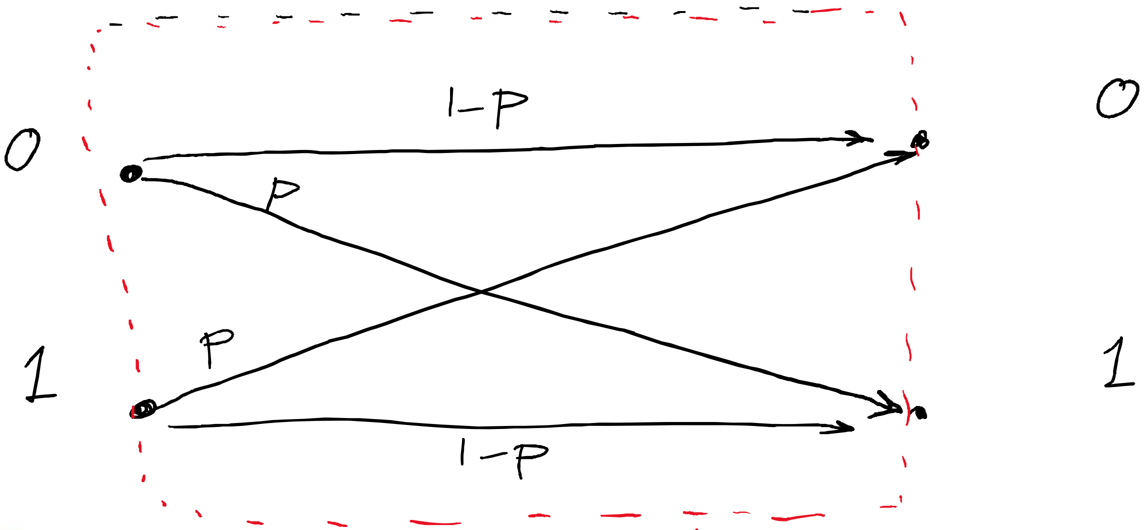
Transmitter

خروجی کانال (سمت گیرنده RX)

Receiver

$1-P_1$

P_1



مدل کانال باینری متقارن

Binary symmetric Channel

(BSC)

با احتمال گذار (خطا) برابر P

$$\boxed{\begin{aligned} P(T_0) &= 1-P_1 \\ P(T_1) &= P_1 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} P(R_0 | T_0) &= 1-P \\ P(R_1 | T_0) &= P \\ P(R_0 | T_1) &= P \\ P(R_1 | T_1) &= 1-P \end{aligned}}$$

احتمال خطا را در این کانال محاسبه کنید. P_e

فرض می کنیم احتمال اینکه بیت '1' در فرستنده ارسال شود برابر P_1 باشد بنابراین احتمال ارسال بیت '0' در فرستنده برابر $1-P_1$ خواهد بود.

پیش آمد خطا = E = پیش آمد اینکه فرستنده بیت '0' را بفرستد و گیرنده بیت '1' دریافت کند یا فرستنده بیت '1' را بفرستد و گیرنده بیت '0' را دریافت کند

$$E = (T_0 \cap R_1) \cup (T_1 \cap R_0)$$

$$\Longrightarrow P(E) = P(T_0 \cap R_1) + P(T_1 \cap R_0) = P(T_0)\,P(R_1|T_0) + P(T_1)\,P(R_0|T_1)$$

T_0 : پیشامد ارسال '0'

T_1 : پیشامد ارسال '1'

R_0 : پیشامد دریافت '0'

R_1 : پیشامد دریافت '1'

$$\Rightarrow P_e = P_r(\epsilon) = P(T_0)\,P(R_1|T_0) + P(T_1)\,P(R_0|T_1)$$

$$= (1-P_1)\,P + P_1\,P = (1-P_1+P_1)\,P = P$$

درمثال قبل: فرض می‌کنیم که گیرنده بیت '0' را دریافت کرده باشد، احتمال اینکه فرستنده
بیت '0' را فرستاده باشد، چقدر است؟

$$P(T_0 | R_0) = ?$$

درواقع احتمال پس از مشاهده را باید محاسبه کنیم. از فرمول بیز استفاده می‌کنیم.

$$P(T_0 | R_0) = \frac{P(R_0 | T_0)\, P(T_0)}{P(R_0)} = \frac{(1-p)(1-p_1)}{P(R_0)}$$

قضیه احتمال کل

$$\Longrightarrow \quad P(R_0) = P(T_0)\, P(R_0 | T_0) + P(T_1)\, P(R_0 | T_1) = (1-p_1)(1-p) + p_1 p$$

$$\Rightarrow P(T_0|R_0) = \frac{(1-P)(1-P_1)}{(1-P)(1-P_1)+PP_1}$$

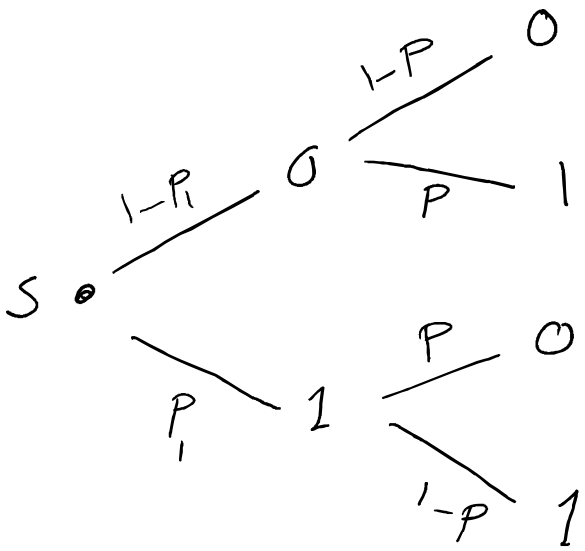
* به عنوان تمرین، احتمال های $P(T_0|R_1)$ ، $P(T_1|R_0)$ ، $P(T_1|R_1)$ را محاسبه کنید

$$P(T_0|R_0)+P(T_1|R_0) = 1$$

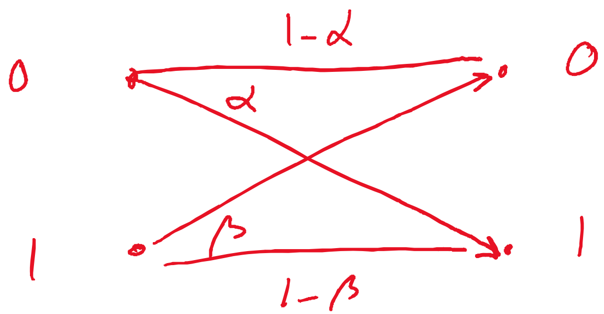
* به عنوان یک مثال عددی $P=0.01$ در نظر بگیرید و احتمال های بالا را به شکل عددی نیز به دست بیاورید.

$$P_1 = \frac{1}{2}$$

از نمودار درختی می‌توانیم برای ساده‌تر شدن محاسبات استفاده کنیم.



* تمرین: مثال قبل را برای یک کانال باینری نامتقارن به صورت زیر تکرار کنید



تکرار درخت برای حالتی که احتمال های
گذار باهم برابر نباشند.